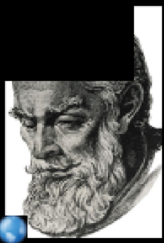
Por un pájaro exterior a un cable eléctrico pasa un sólo cable paralelo al anterior, (fotografiado por Sonia Marichal)

Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.

La geometría euclídea se desarrolla en los siglos XIX y XX, tras la aparición del concepto de espacio vectorial. Recibe su nombre en honor a Euclides, matemático griego (~300 a.C.) quien estudió los conceptos básicos de la Geometría plana, aunque por supuesto no en un contexto vectorial.



POSTULADOS DE EUCLIDES

- Por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una única línea recta.
- Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente.
- Con un centro y un radio dado sólo se puede trazar una única circunferencia.
- Todos los ángulos rectos son iguales.
- Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y solo una paralela a dicha recta.

Espacio métrico

1. Distancias
2. Ángulos
3. Perpendicularidad
4. Simetrías

4. Simetrías

a. Simetría respecto de un punto

b. Simetría respecto de una recta

c. Simetría respecto de un plano

c. Simetría respecto de un plano

El simétrico del punto P respecto del plano π es el punto P' tal que la rect-a que pasa por P y P' es perpendicular al plano π y el punto de intersección rectas r y el plano π es el punto medio del segmento PP'.

Para hallar el punto P' se sigue el procedimiento:

a) Hallar la recta r perpendicular al plano π que pase por el punto P
b) Hallar el punto M de intersección de la recta r con el plano π
c) Aplicar que el punto M es el punto medio del segmento PP'

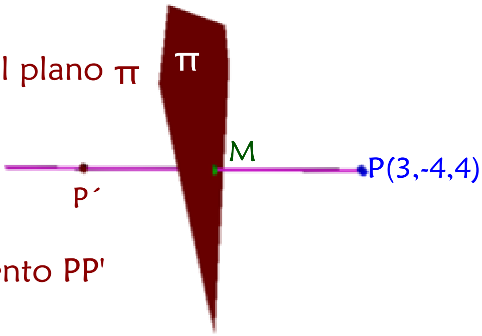
Halla el punto P' simétrico del punto P(3, - 4, 4) respecto del plano:
$\pi \equiv 2x - 3y + 2z - 9 = 0$

a) Hallar la recta r perpendicular al plano π que pase por el punto P

El vector normal del plano π es $\vec{n}(2, -3, 2)$, que es el vector director $\vec{u}(2, -3, 2)$ de la recta perpendicular

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -4 - 3\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

b) Hallar el punto M de intersección de la recta r con el plano π



Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$$(3 + 2\lambda) - 3(-4 - 3\lambda) + 2(4 + 2\lambda) - 9 = 0$$
$$\lambda = -1 \Rightarrow M(1, -1, 2)$$

c) Aplicar que el punto M es el punto medio del segmento PP'

$$\frac{3+x}{2} = 1 \Rightarrow x = -1$$
$$\frac{-4+y}{2} = -1 \Rightarrow y = 2 \quad \rightarrow P' = (-1, 2, 0)$$
$$\frac{4+z}{2} = 2 \Rightarrow z = 0$$

Psimétrico respecto plano.agg

b. Simetría respecto de una recta

El simétrico del punto P respecto de la recta r es el punto P' tal que la recta s que pasa por P y P' es perpendicular a la recta r, y el punto de intersección de las rectas r y s es el punto medio del segmento PP'.

Para hallar el punto P' se sigue el procedimiento:

a) Se halla el plano π perpendicular a la recta r que pase por el punto P
b) Se halla el punto M de intersección de la recta r con el plano π
c) Se aplica que el punto M es el punto medio del segmento PP'

Halla el punto P' simétrico del punto P(2, —3, 5) respecto de la recta:

$$r \equiv \frac{x-8}{5} = \frac{y+2}{2} = z-3$$

Solución

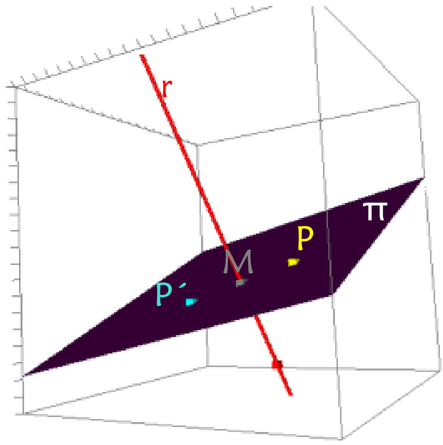
a) Se halla el plano π perpendicular a la recta r que pase por el punto P

El vector director de la recta r es $\vec{v}(5, 2, 1)$, que es el vector normal al plano perpendicular π. Por tanto, $\vec{n}(5, 2, 1)$:

$$5(x - 2) + 2(y + 3) + z - 5 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 5x + 2y + z - 9 = 0$$

b) Se halla el punto M de intersección de la recta r cor

Se pasa la recta a forma paramétrica: $r \equiv \begin{cases} x = 8+5\lambda \\ y = -2+2 \\ z = 3+\lambda \end{cases}$



Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$$5(8 + 5\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) + 3 + \lambda - 9 = 0 =$$
$$\lambda = -1 \Rightarrow M(3, -4, 2)$$

c) Se aplica que el punto M es el punto medio del segmento PP'

$$\frac{2+x}{2} = 3 \Rightarrow x = 4$$
$$\frac{-3+y}{2} = -4 \Rightarrow y = -5 \quad \rightarrow P' = (4, -5, -1)$$
$$\frac{5+z}{2} = 2 \Rightarrow z = -1$$

Psimétrico respecto recta.agg

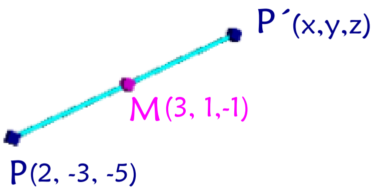
a. Simetría respecto de un punto

El simétrico del punto P respecto del punto M es el punto P' tal que M el punto medio del segmento PP'.

Para hallar el punto P' es suficiente observar que M es el punto medio del segmento PP'

Halla el punto simétrico P' del punto P(2, -3, -5) respecto del punto M(3, 1,-1)

Solución



$$\frac{2+x}{2} = 3 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{-3+y}{2} = 1 \Rightarrow y = 5 \quad \rightarrow P' = (4,5,3)$$

$$\frac{-5+z}{2} = -1 \Rightarrow z = 3$$

3. Perpendicularidad

a. Rectas perpendiculares

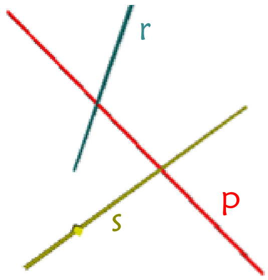
b. Recta y plano perpendiculares

c. Planos perpendiculares

Autor: Isidro Fernández Sánchez

d. Recta que corta perpendicularmente a otras dos

d. Recta que corta perpendicularmente a otras dos



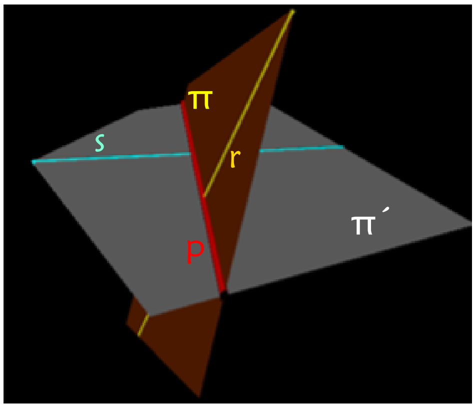
Los pasos a seguir son:

a. Posición relativa de r y s
b. Vector $\vec{n}$ perpendicular a r y s
c. Plano π que contiene a la recta r y al vector $\vec{n}$
d. Plano π' que contiene a la recta s y al vector $\vec{n}$
e. La recta perpendicular común a r y s es la intersección de los planos anteriores

EJEMPLO

Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r \equiv x-1 = y-3 = \frac{z+1}{-1} \qquad s \equiv x-2 = \frac{y-4}{4} = \frac{z-4}{2}$$



a. Posición relativa de r y s

Se cruzan

b. Vector n perpendicular a r y s

$$\vec{u}_r \; x \; \vec{u}_s = \vec{p} = (2,-1,1)$$

c. Plano π que contiene a la recta r y al vector n

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv y+z-2=0$$

d. Plano π´ que contiene a la recta s y al vector n

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi' \equiv 2x+y-3z+4=0$$

e. La recta perpendicular común a r y s es la intersección de los plano anteriores

$$p \equiv \begin{cases} \pi \equiv y+z-2=0 \\ \pi' \equiv 2x+y-3z+4=0 \end{cases}$$

Perpendicular común a otras dos.agg

c. Planos perpendiculares

Dos planos π y π' son perpendiculares si el ángulo que forman es de 90°, es decir, si el producto escalar de los vectores normales $\vec{n}$ y $\vec{n'}$ es cero. Se repre-senta por $\pi \perp \pi'$

Halla el valor de k para que los siguientes planos sean perpendiculares:

$\pi \equiv x - 4y + 1=0$ $\qquad$ $\pi' \equiv 2x + ky - 3z - 8=0$

Solución

$$\vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

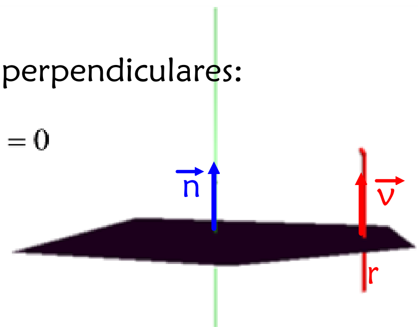
Planos perpendiculares.agg

b. Recta y plano perpendiculares

Una recta r y un plano π son perpendiculares si el ángulo que forman es de 90°, es decir, si la recta es paralela al vector normal al plano; por tanto, $\vec{v} \parallel \vec{n}$.
Se representa por $r \perp \pi$ y se tiene que verificar: $\boxed{\dfrac{v_1}{A} = \dfrac{v_2}{B} = \dfrac{v_3}{C}}$

Justifica por qué la recta r y el plano π son perpendiculares:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-1} = z \qquad \pi : 4x - 2y + 2z + 7 = 0$$



Solución

$\vec{v} = (2,-1,1)$ $\qquad$ $\vec{n} = (4,-2,2)$

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Son perpendiculares porque las coordenadas del vector director $\vec{v}$ de la recta son proporcionales a las coordenadas del vector normal $\vec{n}$ al plano.

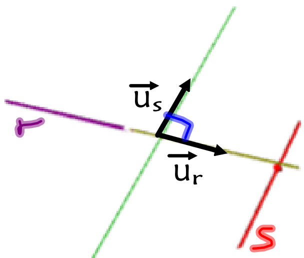
Perpendicularidad recta-plano.agg

a. Rectas perpendiculares

Dos rectas r y s son perpendiculares si el ángulo que forman es de 90°, es de-cir, si el producto escalar de sus vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es cero. Se represen-ta por $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}$

Halla el valor de k para que las siguientes rectas sean perpendiculares:

$$r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{-2} \qquad s \equiv \begin{cases} x = -3+2\lambda \\ y = 5+k\lambda;\ \lambda \in R \\ z = -2-\lambda \end{cases}$$



Solución

$\vec{u}_r = (5,4,-2)$ $\qquad$ $\vec{u}_s = (2,k,-1)$

$\boxed{\vec{u}_r \perp \vec{u}_s} \Rightarrow u_r \cdot u_s = 0 \Rightarrow (5,4,-2).(2,k,-1) = 5.2 + 4.k + 2 = 0 \Rightarrow k=-3$

Perpendicularidad rectas.agg

2. Ángulos

a. Ángulo formado por dos rectas

b. Ángulo formado por dos planos

c. Ángulo recta-plano

c. Ángulo recta-plano

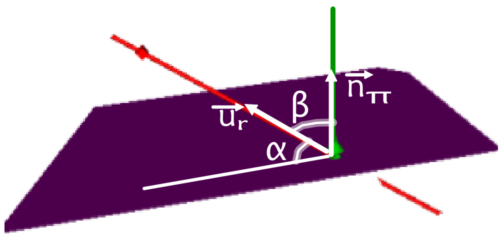
El ángulo formado por una recta y un plano es el ángulo que forman el vector director de la recta y el plano.

Tenemos que hallar el ángulo α. Para ello en primer lugar hallamos el ángulo β, con el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal del plano:

$$Cos\beta = \frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_{\pi}\right|}{\left|\vec{u}_r\right| \cdot \left|\vec{n}_{\pi}\right|}$$

Como α y β son complementarios se verifica que Cosβ=Senα. Por lo tanto:

$$\boxed{Sen\alpha = \frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_{\pi}\right|}{\left|\vec{u}_r\right| \cdot \left|\vec{n}_{\pi}\right|}}$$



Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π:

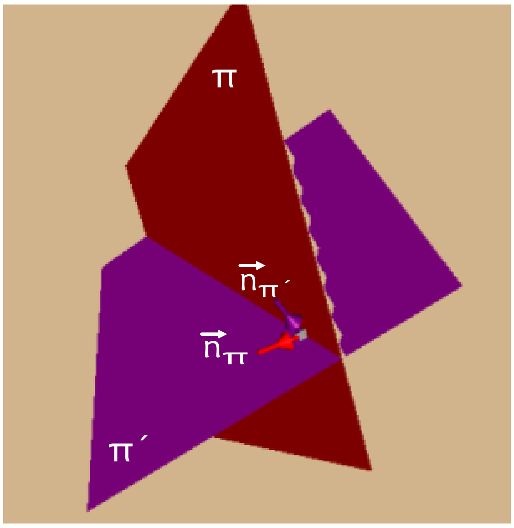
$$r \equiv x-2=\frac{y+3}{2}=1-z \qquad \pi \equiv 2x-3y+z+2=0$$

Solución

$$sen\,\alpha = \frac{\left|(1,2,-1)\cdot(2,-3,1)\right|}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{84}} \Rightarrow \alpha = arcsen\frac{5}{\sqrt{84}} = 33^{\circ}\ 3'\ 42{,}83''$$

b. Ángulo formado por dos planos

Dados los planos $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$
el ángulo α formado por ellos es el mismo que el formado por sus vectores normales:



$$\alpha = (\widehat{\pi, \pi'}) = (\widehat{\vec{n}_{\pi}, \vec{n}_{\pi'}})$$

$$\boxed{Cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_{\pi}| \cdot |\vec{n}_{\pi'}|}}$$

Ejer angulo de dos planos.agg

Dados los planos $\pi \equiv mx+y+z-15=0$ y $\pi' \equiv -2x+y-2z=0$, determinar el valor "m" sabiendo que $tg\alpha=\sqrt{2}$, siendo $\alpha=(\pi,\pi')$

Solución

$n_\pi=(m,1,1)$ $\qquad n_{\pi'}=(-2,1,-2)$

$$\boxed{Cos\alpha = \frac{|\vec{n}_\pi . \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi| . |\vec{n}_{\pi'}|}}$$

$$= \frac{Sen\alpha}{Cos\alpha} \qquad \Rightarrow Cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$n^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$$

$$\vec{n}_{\pi'} = -2m-1 \rightarrow |\vec{n}_\pi . \vec{n}_{\pi'}| = 2m+1$$

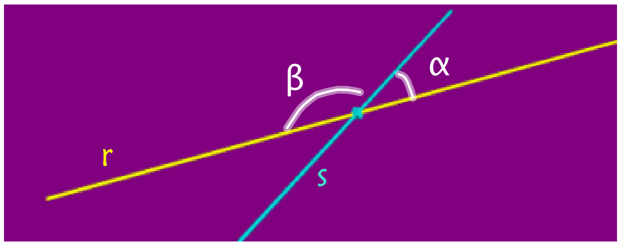
$$| = \sqrt{m^2+2}$$

$$| = 3$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2m+1}{3\sqrt{m^2+2}} \rightarrow \begin{cases} m=-5 \\ m=1 \end{cases}$$

a. Ángulo formado por dos rectas

El ángulo formado por las rectas r y s se define como el menor de los ángulos formados por sus vectores directores



$$\alpha = (\widehat{r,s}) = menor\ (\widehat{\vec{u}_r,\vec{u}_s})$$

$$\vec{u}_r.\vec{u}_s = |\vec{u}_r|.|\vec{u}_s|.Cos\alpha \Rightarrow Cos\alpha = \frac{\vec{u}_r.\vec{u}_s}{|\vec{u}_r|.|\vec{u}_s|}$$

α y β son ángulos suplementarios, por lo tanto Cos β = - Cos α

Si tomamos el valor absoluto nos aseguramos de obtener el menor ángulo

$$\boxed{Cos\alpha = \frac{|\vec{u}_r.\vec{u}_s|}{|\vec{u}_r|.|\vec{u}_s|}}$$

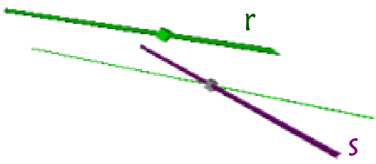
- as dos rectas r y s son coincidentes, el ángulo que forman es cero.
- as dos rectas r y s son paralelas, el ángulo que forman es cero.
- as dos rectas r y s se cortan, se considera el ángulo menor que forman.
- as dos rectas r y s se cruzan, se considera el ángulo que forma la recta r ı una recta s' paralela a la recta s que se corte con r, es decir, una recta que esté en el mismo plano que r.

Calcular el ángulo que forman las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{2} \qquad\qquad s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Solución

$$\cos\alpha = \frac{\left|(1,-1,2)\cdot(3,-1,2)\right|}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{84}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{4}{\sqrt{21}} = 29^\circ\, 12'\, 21{,}36''$$



Angulo de dos rectas que se cortan.agg

Angulo rectas que se cruzan.agg

1. Distancias

a. Distancia entre dos puntos

b. Distancia de un punto a un plano

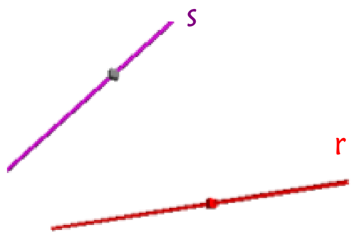
c. Distancia de un punto a una recta

d. Distancia entre dos planos

e. Distancia entre dos rectas

Sarolta Bán

e. Distancia entre dos rectas



- Sean dos rectas $r \equiv \begin{cases} P_r(x_0,y_0,z_0) \\ \vec{u}_r \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} P_s(x_1,y_1,z_1) \\ \vec{u}_s \end{cases}$

se trata de calcular $d(r,s)$

- Se define $d(r,s)=\min\left\{ d(P_r,s) \text{ t.q. } P_r \in r \right\}$

- Si r y s se cortan o coinciden entonces $d(r,s)=0$
- Si son paralelas $d(r,s)=d(P_r,s)$
- Si se cruzan hallamos la distancia:

a) Geométricamente
b) Por fórmula

b) Por fórmula

$$\boxed{d(r,s)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right|}{\left|\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s\right|}}$$

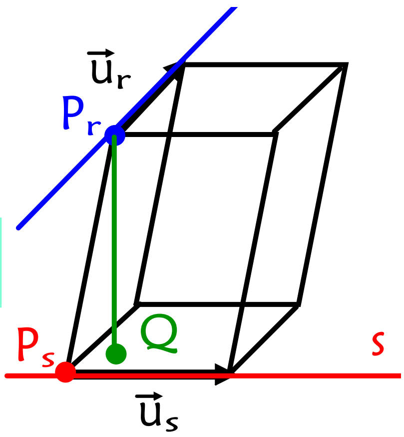
Calcular la distancia de r a s siendo:

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{z}{-1}\qquad\qquad s\equiv -x=y-3=\frac{z-2}{-1}$$

Solución

$$P_r(1,0,0)\qquad P_s(0,3,2)\qquad\qquad \overrightarrow{P_rP_s}(-1,3,2)$$

$$\vec{u}_r(2,0,-1)\quad \vec{u}_s(-1,1,-1)\quad \vec{u}_r\wedge\vec{u}_s=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1,3,2)\Rightarrow d(r,s)=\frac{\left\|\begin{matrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{1+9+4}}=\frac{12}{\sqrt{14}}=\frac{6\sqrt{14}}{7}$$



$d(r,s)$=altura del paralelepípedo determinado por $\vec{u}_r$, $\vec{u}_s$, $\overrightarrow{P_rP_s}$

Sabemos que:

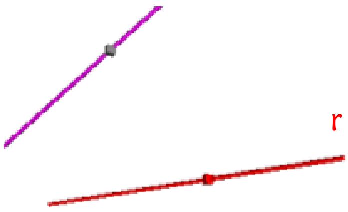
volumen del paralelepípedo = $\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right|$

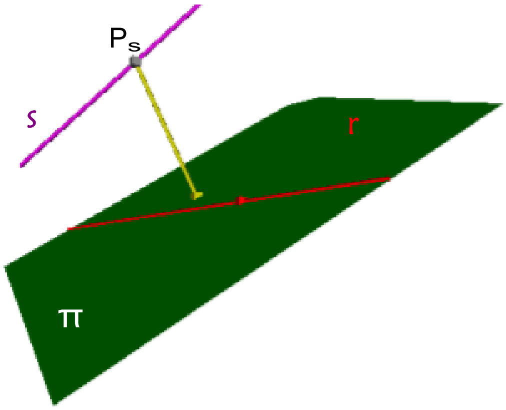
volumen del paralelepípedo = área de la base por la altura= $|\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|\cdot h$

Luego: $\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right| = |\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|\cdot h \Rightarrow h=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right|}{|\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|} \Leftrightarrow$

$$\boxed{d(r,s)=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right|}{|\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|}}$$

a) Geométricamente





1. Construir un plano π que contiene a r y paralelo a s
2. $d(r, s) = d(r, \pi) = d(P_r, \pi)$

Calcular la distancia de r a s siendo:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{z}{-1} \qquad\qquad s \equiv -x = y-3 = \frac{z-2}{-1}$$

Solución

1. Plano π que contiene a r y es paralelo a s : $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x+3y+2z-1=0$

2. Distancia de un punto de s al plano π :

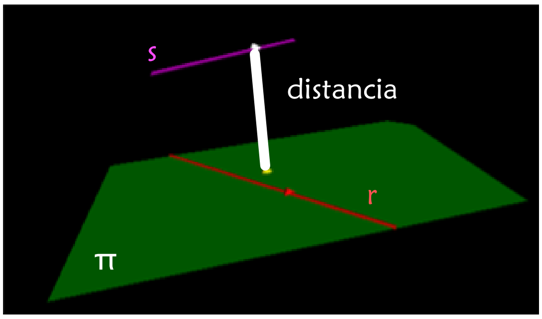
$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} \qquad d(P_s,\pi) = \frac{|9+4-1|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6}{7}\sqrt{14} \simeq 3'207$$

Autograph

Línea de vector: [x; y; z] = [1; 0; 0] + λ[2; 0; -1] r

Línea de vector: [x; y; z] = [0; 3; 2] + λ[-1; 1; -1] s

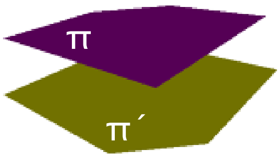
Punto más cercano: (-0,8571; 0,4286; 0,2857); Distancia: 3,207



d. Distancia entre dos planos

- Sean $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$

  se trata de calcular $d(\pi,\pi')$



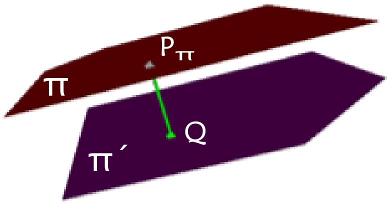
- Se define $d(\pi,\pi')=\min\left\{d(P,\pi') \text{ t.q. } P \in \pi\right\}$

  - Si no son paralelos $d(\pi,\pi')=0$
  - Si son paralelos hallamos su distancia:

a) Geométricamente

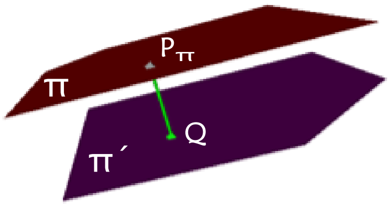
b) Por fórmula

a) Geométricamente



1. Hallar la recta r perpendicular a π y que pasa por un punto de π
2. Hallar el punto Q, intersección de r y π´
3. $d(\pi, \pi') = d(P_\pi, Q_{\pi'})$

Hallar la distancia entre los planos $\pi \equiv 4x-2y+2z+4=0$ y $\pi' \equiv 2x-y+z-3=0$



Solución

a) Recta r perpendicular a π por P_π: $\begin{cases} P_\pi(0,2,0) \\ \vec{n}_\pi = \vec{n}_{\pi'} = \vec{u}_r(2,-1,1)) \end{cases}$

b) Punto $Q \Rightarrow r \cap \pi'$: $Q=(5/3,7/6,5/6)$

El punto Q lo podemos hallar:

- Con la recta r en paramétricas, sustituyendo éstas en el plano ($\lambda=5/6$)
- Con las ecuaciones implícitas de la recta y la ecuación del plano resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x \quad -2z = 0 \\ \quad y + z = 2 \end{cases}$$

c) $d(\pi,\pi') = d(P_\pi, Q) = \dfrac{5\sqrt{6}}{6} \cong 2'041\, u$

Distancia de dos planos.agg

b) Por fórmula

$$\boxed{d(\pi,\pi') = d(P,\pi') = \frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Hallar la distancia entre los planos $\pi \equiv 4x-2y+2z+4=0$ y $\pi' \equiv 2x-y+z-3=0$

Solución

$$d(\pi,\pi') = \frac{|-3-2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Al ser paralelos sus ecuaciones solo difieren en los términos independientes es decir:

$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv Ax+By+Cz+D'=0$

$d(\pi,\pi')=d(P,\pi')$ t.q. $P(x_0,y_0,z_0)\in\pi$ ya sabemos que

$$d(P,\pi')=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \underset{P\in\pi\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0=-D}{=} \frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Nota: Para aplicar la fórmula las ecuaciones de los planos tienen que tener los mismos coeficientes de las variables.

a. Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $A(x_0, y_0\ z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$$\boxed{d(AB) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}$$

Halla la distancia que hay entre los puntos A(3, -4, 1) y B(5, 1, 4)

Solución

$$d(AB) = |\vec{AB}| = \sqrt{(5-3)^2 + (1+4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{38} \approx 6.16$$

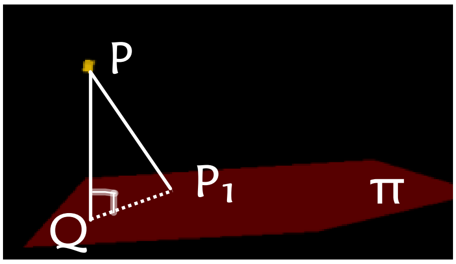

Distancia dos puntos.agg

b. Distancia de un punto a un plano

- Sea un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y un plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$:

  se trata de calcular $d(P,\pi)$

- Se define $d(P,\pi)=\min\left\{d(P,P_1) \text{ t.q. } P_1 \in \pi\right\}= d(P,Q)$



Dos formas de calcular la distancia de un punto a un plano:

a) Geométricamente

b) Por fórmula

b) Por fórmula

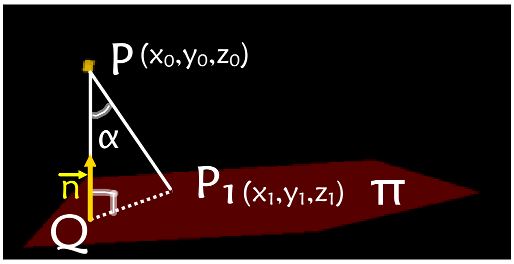
$$\boxed{d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Halla la distancia que hay desde el punto P(4, -1, 3) al plano
π = 2x - 3y + 5z - 7 = 0

Solución

$$d(P,\pi)=\frac{|8+3+15-7|}{\sqrt{4+9+25}}=\frac{19}{\sqrt{38}}=\frac{19\sqrt{38}}{38}\cong 3'08\ u$$

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$ genérico



$\Rightarrow d(P,\pi)=d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ $\Rightarrow$Fijándonos en el gráfico$\Rightarrow$ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PP_1}\right| \cos\alpha$ $\overrightarrow{PP_1}$

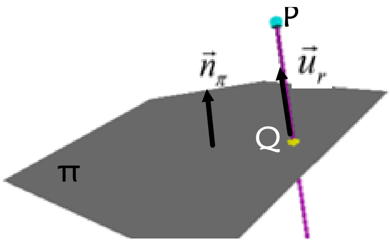
$\Rightarrow$Por otro lado hallamos el producto escalar $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PP_1}$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PP_1} = |\vec{n}| \cdot \underline{\left|\overrightarrow{PP_1}\right| \cdot \cos\alpha} = |\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |\vec{n}| \cdot d(P,\pi) \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PP_1}\right|}{|\vec{n}|} =$$

$$= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\underset{P_1 \in \pi \Rightarrow Ax_1+By_1+Cz_1+D=0}{=} \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ por tanto $$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

a) Geométricamente



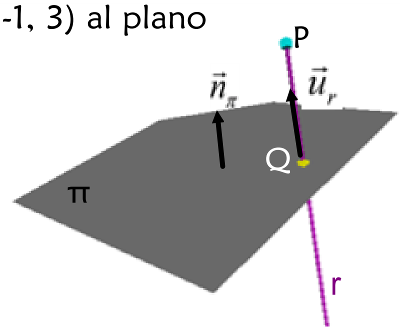
1. Calcular una recta r perpendicular a π y que pase por P.

$$u_r = n_\pi$$

2. Hallar el punto Q, intersección de recta y plano: $r \cap \pi = Q$

3. La distancia buscada es: $\boxed{d(P,\pi)=d(P,Q)}$

Halla la distancia que hay desde el punto P(4, -1, 3) al plano
π = 2x - 3y + 5z - 7 = 0



Solución

a) r⊥π⇒ $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 3 + 5\lambda \end{cases}$

b) r π⇒ Q= (3; 0,5; 0,5)

$$\pi \equiv 2x - 3y + 5z - 7 = 0 \rightarrow 2(4 + 2\lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5(3 + 5\lambda) - 7 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1}{2}$$

c) Distancia= d(PQ)=3,082

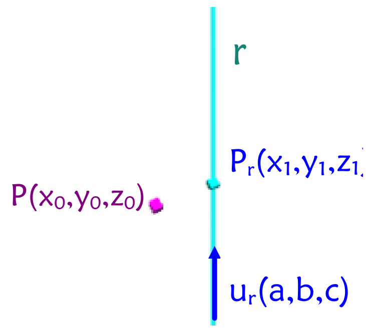
$\boxed{d(AB) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}$ $d(PQ) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(3-4)^2 + (0'5+1)^2 + (0'5-3)^2} = \sqrt{9.5} = 3'08\ u$

Distanc punto plano.agg

c. Distancia de un punto a una recta

- Sea un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y una recta $\begin{cases} P_r(x_1,y_1,z_1) \\ \vec{u}_r(a,b,c) \end{cases}$

se trata de calcular $d(P,r)$



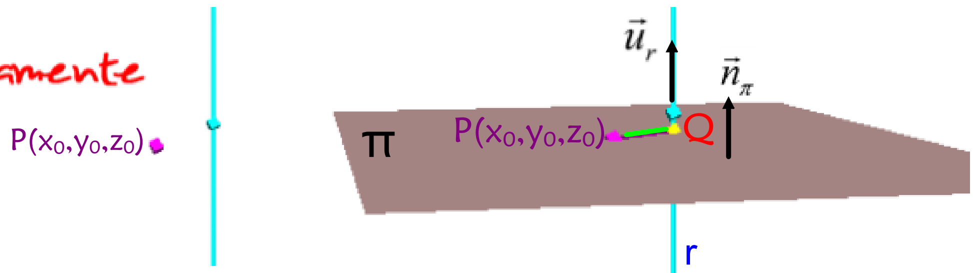
- Se define $d(P,r)=\min\left\{d(P,P_r) \text{ t.q. } P_r \in r\right\} = d(P,P_r)$

Dos formas de calcular la distancia de un punto a un plano:

a) Geométricamente

b) Por fórmula

a) Geométricamente



1. Hallar un plano π⊥ r que pasa por P $\longrightarrow \vec{u}_r = \vec{n}_\pi$

2. Hallar el punto Q, intersección de recta y plano: r π=Q

3. La distancia buscada es: $\boxed{d(P,r)=d(PQ)}$

Halla la distancia que hay desde el punto P(1, -1, 1) a la recta:

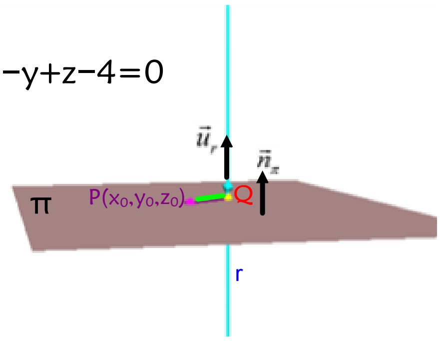
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z+5$$

Solución

a) Plano π perpendicular a r por P: $\vec{n}_\pi=(2,-1,1) \Rightarrow \pi \equiv 2x-y+z-4=0$

b) Punto Q⇒ $r \cap \pi$: Q=(7/3,-11/3,-13/3)

c) $d(P,r)=d(P,Q)=\dfrac{\sqrt{336}}{3} \cong 6'11\ u$



Distanc punto recta.agg

b) Por fórmula

$$\boxed{d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}}$$

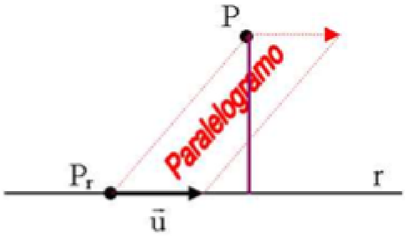
Halla la distancia que hay desde el punto P(1, -1, 1) a la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=z+5$

Solución

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}\ \text{con } P(1,\text{-}1,1),\ P_r(1,\text{-}3,\text{-}5),\ \vec{u}(2,-1,1)\ \Rightarrow$$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-2 & -6\\ -1 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0 & -6\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{224}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{336}}{3}$$

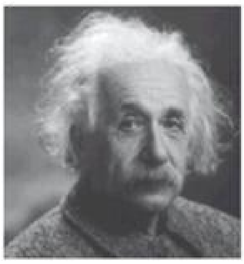
Según observamos en el gráfico adjunto, d(P,r)=altura del paralelogramo determinado por el vector director de r y por el vector P_rP.



Sabemos que el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{P_rP}$ es:

Área del paralelogramo $\left|\overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{u}\right| = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| \cdot d(P, r) \Rightarrow$

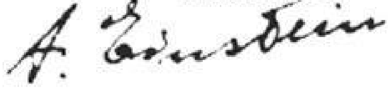
$$\boxed{d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}}$$



No pretendamos que las cosas cambien si siempre hacemos lo mismo". La crisis es la mejor bendición que puede sucederle a personas y países porque la crisis trae progresos. La creatividad nace de la angustia como el día nace de la noche oscura. Es en la crisis que nace la inventiva, los descubrimientos y las grandes estrategias. Quien supera la crisis se supera a si mismo sin quedar "superado". Quien atribuye a la crisis sus fracasos y penurias violenta su propio talento y respeta más a los problemas que a las soluciones. La verdadera crisis es la crisis de la incompetencia. El problema de las personas y los países es la pereza para encontrar las salidas y soluciones. Sin crisis no hay desafíos, sin desafíos la vida es una rutina, una lenta agonía. Sin crisis no hay méritos. Es en la crisis donde aflora lo mejor de cada uno, porque sin crisis todo viento es caricia.

Hablar de crisis es promoverla, y callar en la crisis es exaltar el conformismo. En vez de esto trabajemos duro. Acabemos de una vez con la única crisis amenazadora que es la tragedia de no querer luchar por superarla.

Albert Einstein



Tema: Espacio métrico

Materia/Nivel: Matemáticas . 2º Bachillerato Ciencias

Fecha de Creación/Revisión de la actividad: Enero 2012

Programa y versión: Notebook 10.8.364.0

Autor: Ángeles de Dios González

Correo electrónico: clasleya18@hotmail.com

Comunidad Autónoma: Castilla y León

- Distancia dos rectas.agg
- Distancia dos puntos.agg
- Distanc punto plano.agg
- Distanc punto recta.agg
- Distancia de dos planos.agg
- Perpendicularidad rectas.agg
- Perpendicularidad recta-plano.agg
- Perpendicular común a otras dos.agg
- Planos perpendiculares.agg
- Ejer angulo de dos planos.agg
- Angulo de dos rectas que se cortan.agg
- Angulo rectas que se cruzan.agg
- Psimétrico respecto recta.agg
- Psimétrico respecto plano.agg